

# Übertragungsfunktion und Faltung

Die Übertragungsfunktion  $h(t)$  beschreibt die Impulsantwort eines Systems. Faltet man diese Impulsantwort mit einer Anregung  $s(t)$ , so erhält man die Antwort des Systems auf diese Anregung. Es gilt

$$h(t) * s(t) = x(t).$$

Am Beispiel eines Masse–Feder–Dämpfer–Systems (also zum Beispiel eine Masse, die an einem kurzen Gummiband befestigt ist) kann man den Nutzen dieses Formalismus gut demonstrieren.

Das System wird von der gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = s(t)$$

beschrieben. Dabei ist  $m$  die beschleunigte Masse,  $c$  die Dämpfung und  $k$  die Federkonstante. Durch Fouriertransformation der Differenzialgleichung erhalten wir

$$-m\omega^2 X(\omega) + ci\omega X(\omega) + kX(\omega) = S(\omega).$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{S(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + ci\omega + k} \quad \bullet \circ h(t) = Ae^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_D t).$$

mit

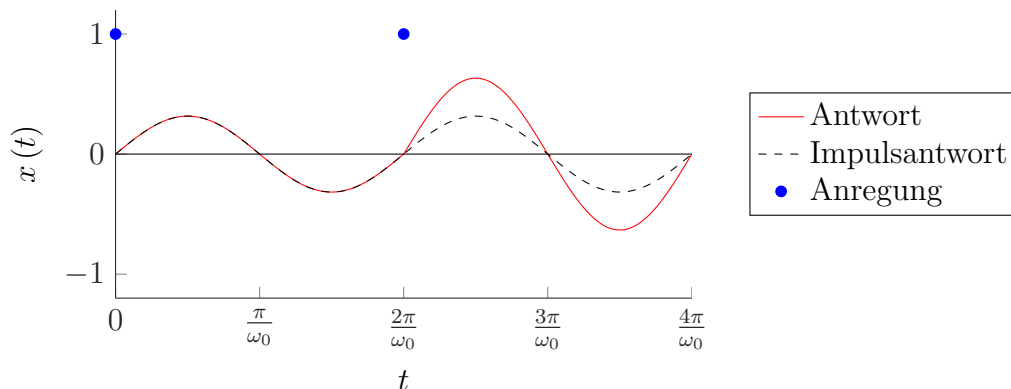
$$D = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{\sqrt{km(1 - D^2)}}$$

Diese Impulsantwort sieht erst einmal recht kompliziert aus, beschreibt jedoch lediglich eine periodische Schwingung  $\sin(\omega_D t)$  mit einer Amplitude  $A$  welche mit die Zeit exponentiell (je nach Dämpfung) abklingt  $e^{-D\omega_0 t}$ .

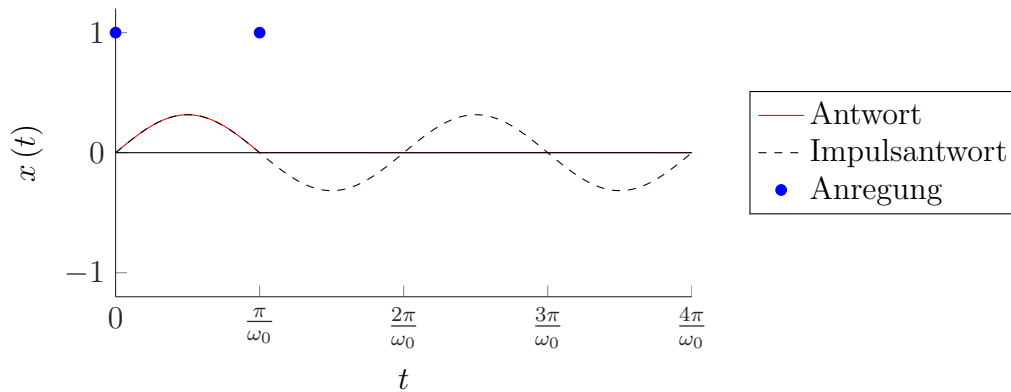
Durch die Faltung von  $h(t)$  mit der Anregung  $s(t)$  kann man nun ohne Probleme die Lösung der Differenzialgleichung berechnen. Besonders einfach kann man die Faltung mithilfe von MATLAB berechnen und so Lösungen für Masse–Feder–Dämpfer–Systeme mit komplizierten, aperiodischen Anregungen berechnen.

## Beispiele:

Durch die Anregung  $s(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$  wird das System durch zwei Impulse in Phase ange-regt. Der erste Impuls erzeugt eine Schwingung, welche genau der Impulsantwort entspricht. Der zweite Impuls verstärkt die Schwingung weiter und vergrößert dadurch die Amplitude.



Durch die Anregung  $s(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega_0}\right)$  wird das System durch zwei gegenphasige Impulse angeregt. Der erste Impuls erzeugt eine Schwingung, welche genau der Impulsantwort entspricht. Der zweite Impuls wirkt genau eine halbe Periodenlänge später auf das System und löscht die Schwingung dadurch wieder aus.



Die Anregung  $s(t) = \cos(\omega_D t)$  regt das System genau in der Resonanzfrequenz  $\omega_D$  an. Durch diese Anregung nimmt die Amplitude stetig zu. Bei ungedämpften Systemen ist das Wachstum der Amplitude nicht beschränkt, was schließlich zur Resonanzkatastrophe führt.

